Compléments à l'étude des opérateurs de classe C_0. III

Par H. BERCOVICI et C. FOIAŞ à Bucarest, et B. SZ.-NAGY à Szeged

I. Modèle de Jordan

1. Dans cette partie de la Note on étend des résultats des articles [1], [2] sur le modèle de Jordan des opérateurs de classe C_0, de multiplicité finie, aux opérateurs de multiplicité quelconque, définis dans un espace de Hilbert séparable $\mathfrak{H}$. Voir aussi [H].

Faisant usage de notations déjà employées dans les articles cités, considérons les opérateurs

$$S(M) = S(m_1) \oplus S(m_2) \oplus \ldots \tag{1.1}$$

attachés à des suites $M = \{m_j\}_1^\infty$ de fonctions intérieures m_j, telles que m_{j+1} soit un diviseur de m_j pour $j = 1, 2, \ldots$. Nous convenons de ne pas distinguer deux fonctions interieures qui coïncident à un facteur numérique constant près. Notons que l'espace $\mathfrak{H}(m)$, dans lequel $S(m)$ est défini, se réduit à l'espace zéro $\{0\}$ si $m=1$ et dans ce cas seulement. La multiplicité μ de $S(M)$ est égale à ∞ $(= \aleph_0)$ si toutes les fonctions m_j sont non-constantes, autrement elle est égale au rang j de la dernière des fonctions m_j non-constantes.

Nous allons établir le suivant

Théorème 1. *Pour un opérateur T de classe C_0, danc un espace de Hilbert séparable $\mathfrak{H}$, il existe un opérateur $S(M)$ de type* (1.1) *et un seul tel que*

$$T \succ S(M). \tag{1.2}$$

Cet opérateur $S(M)$ vérifie aussi la relation $S(M) \succ T$, donc est quasi-similaire à T.

2. Pour un opérateur T de classe C_0 dans l'espace $\mathfrak{H}$ on désignera par m_T la fonction minimum de T et par m_f $(f \in H)$ la fonction minimum de la restriction $T_f = T|\mathfrak{H}_f$ où

où
$$\mathfrak{H}_f = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n f.$$

Dans la démonstration du théorème on fera usage en particulier des propositions suivantes:

Proposition 1. *Pour T de classe C_0 dans $\mathfrak{H}$ les vecteurs $f\in\mathfrak{H}$ tels que*

$$m_f = m_T, \tag{2.1}$$

sont denses dans $\mathfrak{H}$.

Démonstration. L'existence d'un $g\in\mathfrak{H}$ vérifiant $m_g = m_T$ est assurée par le théorème 1 de [2]. Soit h un élément donné quelconque de $\mathfrak{H}$ et soit $[g, h]$ le sous-espace (de dimension $\leqq 2$) sous-tendu par g et h. D'après le lemme de SHERMAN (cf. [2], Lemme 3) les vecteurs f de $[g, h]$ pour lesquels $m_f = m_g \vee m_h$ $(= m_T \vee m_h = m_T)$ sont denses dans $[g, h]$. Par conséquent, les f vérifiant (2.1) sont denses dans $\mathfrak{H}$.

Proposition 2. *Soit f un élément de l'espace $\mathfrak{H}$ vérifiant* (2.1). *Il existe alors un sous-espace $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{H}$ invariant pour T et une quasi-affinité*

$$X\colon \mathfrak{H}(m) \to \mathfrak{H}_f \qquad (m = m_T) \tag{2.2}$$

tels que

$$XS(m) = TX, \tag{2.3}$$

$$\mathfrak{H}_f \vee \mathfrak{M} = \mathfrak{H}, \tag{2.4}$$

$$X\mathfrak{H}(m) \cap \mathfrak{M} = \{0\}. \tag{2.5}$$

Démonstration. Il n'y a qu'à combiner la démonstration donnée dans la section 2 de [1] avec celle de la Proposition 2 de [2], p. 295.

3. Cela étant nous abordons la démonstration du théorème en montrant qu'il existe un opérateur $S(M)$ vérifiant (1.2).

Choisissons, à cet effet, une suite $\{\varphi_m\}_1^\infty$ de vecteurs dans $\mathfrak{H}$ qui sous-tendent $\mathfrak{H}$, et soit $\{\psi_n\}_1^\infty$ une suite dans laquelle chaque φ_m se repète à une infinité de fois.

En vertu de la Proposition 1 il existe un $f_1\in\mathfrak{H}$ tel que

$$m_{f_1} = m_T \quad \text{et} \quad \|f_1 - \psi_1\| < \frac{1}{2}. \tag{3.1$_1$}$$

D'après la Proposition 2 il existe alors un sous-espace $\mathfrak{M}_1$ de $\mathfrak{H}$ invariant pour T, et une quasi-affinité

$$X_1\colon \mathfrak{H}(m_1) \to \mathfrak{H}_{f_1} \qquad (m_1 = m_T) \tag{3.2$_1$}$$

vérifiant

$$X_1 S(m_1) = TX_1, \tag{3.3$_1$}$$

$$\mathfrak{H}_{f_1} \vee \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{H}, \tag{3.4$_1$}$$

$$X\mathfrak{H}(m_1) \cap \mathfrak{M}_1 = \{0\}. \tag{3.5$_1$}$$

Vu $(3,1)_1$ on a aussi, puisque $f_1 \in \mathfrak{H}_{f_1}$,

$(3.6)_1$ $$\|\psi_1 - P_{\mathfrak{H}_{f_1}} \psi_1\| < \frac{1}{2}.$$

D'autre part, de $(3.4)_1$ nous déduisons qu'il existe un $f_{12} \in \mathfrak{H}_{f_1}$ et un $h_2 \in \mathfrak{M}_1$ tels que

(3.7) $$\| f_{12} + h_2 - \psi_2\| < \frac{1}{2^3}.$$

Appliquons maintenant les Propositions 1 et 2 à $T_1 = T|\mathfrak{M}_1$ au lieu de T et notons que m_{T_1}, que nous désignons aussi par m_2, est un diviseur de $m_1 (= m_T)$. Nous obtenons qu'il existe un $f_2 \in \mathfrak{M}_1$ tel que

$(3.1)_2$ $$m_{f_2} = m_2, \qquad \|f_2 - h_2\| < \frac{1}{2^3},$$

un sous-espace $\mathfrak{M}_2$ de $\mathfrak{M}_1$, invariant pour T_1 (donc pour T), et une quasi-affinité

$(3.2)_2$ $$X_2 \colon \mathfrak{H}(m_2) \to \mathfrak{H}_{f_2},$$

telles que

$(3.3)_2$ $$X_2 S(m_2) = T X_2,$$

$(3.4)_2$ $$\mathfrak{H}_{f_2} \vee \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1,$$

$(3.5)_2$ $$X_2 \mathfrak{H}(m_2) \cap \mathfrak{M}_2 = \{0\}.$$

En vertu de (3.7) et $(3.1)_2$ on a aussi

$$\|f_{12} + f_2 - \psi_2\| < \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^2};$$

puisque $f_{12} \in \mathfrak{H}_{f_1}$ et $f_2 \in \mathfrak{H}_{f_2}$ cela entraîne

$(3.6)_2$ $$\|\psi_2 - P_{\mathfrak{H}_{f_1} \vee \mathfrak{H}_{f_2}} \psi_2\| < \frac{1}{2^2}.$$

On continue le procédé par récurrence et on obtient ainsi une suite

$$(\mathfrak{H} =)\ \mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{M}_n \supset \ldots$$

de sous-espaces invariants pour T, des vecteurs

$$f_n \in \mathfrak{M}_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

tels que

$(3.1)_n$ $$m_{f_n} = m_n \qquad (\text{où } m_n = m_{T|\mathfrak{M}_{n-1}}),$$

et des quasi-affinités

$(3.2)_n$ $$X_n \colon \mathfrak{H}(m_n) \to \mathfrak{H}_{f_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

telles que

$$X_n S(m_n) = TX_n, \tag{3.3$_n$}$$

et que de plus on a

$$\mathfrak{H}_{f_n} \vee \mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_{n-1}, \tag{3.4$_n$}$$

$$X_n \mathfrak{H}(m_n) \cap \mathfrak{M}_n = \{0\} \tag{3.5$_n$}$$

et

$$\|\psi_n - P_{\mathfrak{H}_{f_1} \vee \ldots \vee \mathfrak{H}_{f_n}} \psi_n\| < \frac{1}{2^n} \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{3.6$_n$}$$

On peut évidemment supposer aussi que

$$\sum_n \|X_n\|^2 \leqq 1, \tag{3.8}$$

en exigeant p. ex. que $\|X_n\| < 1/2^n$.

Puisque $\mathfrak{M}_n \subset \mathfrak{M}_{n-1}$, m_n est un diviseur de m_{n-1}, donc la suite

$$M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots\}$$

est de type considéré dans la section 1. Il peut arriver que $\mathfrak{M}_n$ se réduise à $\{0\}$ à partir d'un certain rang n; pour tels n on a $m_n = 1$ et $\mathfrak{H}(m_n) = \{0\}$. Mais en tous les cas on peut former l'espace

$$\mathfrak{H}(M) = \bigoplus_1^\infty \mathfrak{H}(m_n) \tag{3.9}$$

et l'opérateur $S(M)$ correspondant. De plus, grâce à (3.2), (3.3) et (3.8) on peut définir par

$$X(h_1 \oplus h_2 \oplus \ldots \oplus h_n \oplus \ldots) = \sum_1^\infty X_n h_n$$

un opérateur

$$X \colon \mathfrak{H}(M) \to \mathfrak{H}$$

tel que

$$\|X\| \leqq 1 \quad \text{et} \quad XS(M) = TX.$$

Nous allons démontrer que X est une quasi-affinité.

Soit $h = h_1 \oplus h_2 \oplus \ldots$ tel que $Xh = 0$, il s'agit de montrer que $h = \{0\}$. En effet, si $h \neq 0$, il existe un premier j tel que $h_j \neq 0$, et par (3.2) et (3.4) on a alors

$$X_j \mathfrak{H}(m_j) \ni X_j h_j = -\sum_{j+1}^\infty X_n h_n \in \bigvee_{j+1}^\infty \mathfrak{H}_{f_n} \subset \bigvee_{j+1}^\infty \mathfrak{M}_{n-1} \doteq \mathfrak{M}_j;$$

vu (3.5) cela entraîne $X_j h_j = 0$: contradiction parce que X_j a le noyau $\{0\}$. Donc X a aussi le noyau $\{0\}$.

D'autre part, la fermeture de $X\mathfrak{H}(M)$ étant évidemment égale à $\mathfrak{H}'=\bigvee_1^\infty \mathfrak{H}_{f_n}$, il nous reste à démontrer que $\mathfrak{H}'=\mathfrak{H}$.

Notons, à cet effet, que par (3.6) on a

$$\|\psi_n - P_{\mathfrak{H}'}\psi_n\| < \frac{1}{2^n} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.10}$$

Or pour chaque élément φ_m du système $\{\varphi_m\}_1^\infty$ il existe une suite d'indices $n_j \to \infty$ telle que $\psi_{n_j}=\varphi_m$, donc par (3.10),

$$\|\varphi_m - P_{\mathfrak{H}'}\varphi_m\| < \frac{1}{2^{n_j}} \to 0 \quad (j \to \infty),$$

et par conséquent $\varphi_m - P_{\mathfrak{H}'}\varphi_m = 0$, $\varphi_m \in \mathfrak{H}'$. Comme les φ sous-tendent $\mathfrak{H}$, cela prouve que $\mathfrak{H}'=\mathfrak{H}$.

Donc X est une quasi-affinité et on a

$$T \succ S(M).$$

4. Comme T^* est de classe C_0 en même temps que T, il existe aussi une suite $M'=\{m_j\}_1^\infty$ de même type que M pour laquelle $T^* \succ S(M')$, donc $T \prec S(P)$ où $P=\{p_j\}_1^\infty$, $p_j = m_j'^{\sim}$, et par conséquent

$$S(P) \succ T \succ S(M). \tag{4.1}$$

Soient $M=\{m_j\}$ et $P=\{p_j\}$ quelconques, satisfaisant

$$S(P) \succ S(M) \tag{4.2}$$

On a alors $p_j = m_j$ $(j=1, 2, \ldots)$. Cela se démontre par la méthode employée dans [1] et [3], pp. 313—316, notamment de la manière suivante.

Pour une fonction intérieure quelconque w nous formons les suites

$$P^w = \{p_j^w\} \quad \text{et} \quad M^w = \{m_j^w\} \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

où $p_j^w = p_j/(p_j \wedge w)$ et $m_j^w = m_j/(m_j \wedge w)$; suites qui sont de même type que nous avons toujours envisagé ci-dessus, et de (4.2) il résulte aussi

$$S(P^w) \succ S(M^w). \tag{4.3}$$

Une conséquence immédiate de (4.3) est que, pour un entier k quelconque, $k \geqq 1$, l'opérateur

$$S(M_1^w) = S(m_k^w) \oplus \ldots \oplus S(m_k^w)$$

peut être injecté dans $S(P^w)$ dans le sens introduit dans [3], c'est-à-dire qu'il existe un opérateur injectif Y_k tel que $S(P^w)\, Y_k = Y_k\, S(M_k^w)$.

Choisissons $w=p_k$. Dans ce cas $p_j^w=1$ pour $j\geqq k$, donc $S(P^w)$ se réduit à

$$S(P_{k-1}^w) = S(p_1^w)\oplus\ldots\oplus S(p_{k-1}^w).$$

Du fait que $S(M_k^w)$ peut être injecté dans $S(P_{k-1}^w)$ il s'ensuit, en vertu du théorème 4 de [3], que $m_k^w=1$, c'est-à-dire que $m_k\wedge w=m_k$, m_k est un diviseur de $w=p_k$.

Comme (4.2) entraîne $S(M)^*\succ S(P)^*$, donc

$$S(M^\sim)\succ S(P^\sim), \tag{4.2)*$$

il s'ensuit de la même manière que $p_k^\sim$ est un diviseur de $m_k^\sim$, ce qui est équivalent à ce que p_k est un diviseur de m_k.

On conclut que $p_k=m_k$ ($k=1, 2, \ldots$), ce qui achève la démonstration de l'unicité de $S(M)$ vérifiant (1.2), et par (4.1) aussi de ce que T est quasi-similaire à $S(M)$.

Cela achève la démonstration du théorème 1.

II. Le bicommutant

5. Dans la Note [1] on a démontré (théorème 3) que le bicommutant $(T)''$ d'un opérateur T de classe C_0, de multiplicité finie, est constitué des opérateurs X fonctions de T, $X=\varphi(T)$, où φ appartient à la classe N_T de fonctions analytiques dans le disque unité, considérée dans le chap. IV de [H].

Faisant usage de notre théorème 1 sur le modèle jordanien d'un opérateur T de classe C_0, de type général, ainsi que d'autres résultats, on va étendre ce théorème à tous ces opérateurs T. On établira donc:

Théorème 2. *Pour un opérateur quelconque T de classe C_0, dans un espace de Hilbert séparable $\mathfrak{H}$, tout opérateur $X\in(T)''$ est de la forme*

$$X = \varphi(T) \quad \textit{où} \quad \varphi = u/v\in N_T.$$

6. Démonstration. Soit $S(M)=S(m_1)\oplus S(m_2)\oplus\ldots$ le modèle de T, défini dans l'espace

$$\mathfrak{H}(M) = \mathfrak{H}(m_1)\oplus\mathfrak{H}(m_2)\oplus\ldots, \tag{6.1}$$

soient A, B des quasi-affinités telles que

$$S(M)A = AT, \quad TB = BS(M), \tag{6.2}$$

et soit $X\in(T)''$. On a alors pour $Y\in\big(S(M)\big)'$ quelconque,

$$BYA\cdot T = BY\cdot AT = BY\cdot S(M)A = B\cdot YS(M)\cdot A = B\cdot S(M)Y\cdot A =$$
$$= BS(M)\cdot YA = TB\cdot YA = T\cdot BYA$$

et par conséquent BYA permute à X, d'où

$$AXB \cdot Y \cdot AB = AB \cdot Y \cdot AXB.$$

Notons aussi que (6.2) entraîne $AB \in (S(M))'$.

On aussi $AXB \in (S(M))'$ parce que

$$S(M)A \cdot XB = AT \cdot XB = A \cdot TX \cdot B = A \cdot XT \cdot B = AX \cdot TB = AX \cdot B\ S(M).$$

Donc en posant

$$R = AB \quad \text{et} \quad Q = AXB \tag{6.3}$$

on a $R, Q \in (S(M))'$ et l'équation

$$RYQ = QYR \tag{6.4}$$

est vérifiée pour tout $Y \in (S(M))'$.

Or $S(M)$ a pour dilatation isométrique minimum l'opérateur $S_\infty = S \oplus S \oplus \dots$ dans l'espace $H^2_\infty = H^2 \oplus H^2 \oplus \dots$ où S est la translation unilatérale $u(\lambda) \to \lambda \cdot u(\lambda)$ dans H^2. Donc, en représentant tout opérateur Φ dans $\mathfrak{H}(M)$ par sa matrice $[\Phi_{ij}]$ $(i, j = 1, 2, \dots)$ suivant la décomposition (6.2), on déduit du théorème sur la dilatation des commutants (cf. [H], Theorem VI. 3.6) que la forme générale d'un opérateur $Y = [Y_{ij}]$ dans $\mathfrak{H}(M)$, permutant à $S(M)$, est donnée par

$$Y_{ij} h_j = P_{\mathfrak{H}(m_i)} y_{ij} h_j \qquad (h_j \in \mathfrak{H}(m_j)) \tag{6.5}$$

où

$$y_{ij} \in H^\infty, \quad y_{ij} m_j \in m_i H^2, \tag{6.6}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} y_{ij}(\lambda) c_j \right|^2 \leqq \|Y\|^2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \tag{6.7}$$

pour tout $c = (c_1, c_2, \dots) \in l^2$ et tout λ complexe, $|\lambda| < 1$.

Soient $[r_{ij}]$ et $[q_{ij}]$ les matrices sur H^∞ correspondant dans ce sens à R et Q, et choisissons pour k fixé quelconque $(k = 1, 2, \dots)$ l'opérateur $Y^{(k)}$ pour lequel la matrice $[y_{ij}^{(k)}]$ est donnée par

$$y_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i, j) = (k, 1) \\ 0 & \text{dans tous les autres cas;} \end{cases} \tag{6.8}$$

les relations (6.6) et (6.7) sont évidemment vérifiées, avec $\|Y^{(k)}\| = 1$, puisque m_k est un diviseur de m_1.

En appliquant à (6.4) la propriété de multiplication donnée dans [4], p. 227, on aura

$$P_{\mathfrak{H}(m_i)}(r_{ik} q_{1j} - q_{ik} r_{1j}) h = 0 \quad \text{pour} \quad h \in \mathfrak{H}(m_j).$$

La même équation subsiste pour $h \in \mathfrak{H}(m_j)^{\perp}$ $(=m_j H^2)$ parce que de (6.6) il s'ensuit

$$r_{ik} q_{1j} m_j \in r_{ik} m_1 H^2 = r_{ik} m_k \cdot \frac{m_1}{m_k} H^2 \subset m_i H^2$$

et la relation analogue pour q, r au lieu de r, q.

On conclut que

(6.9) $\quad P_{\mathfrak{H}(m_i)}(q_{1j} r_{ik} - r_{1j} q_{ik}) h = 0 \quad$ pour $\quad i, j, k = 1, 2, \ldots \quad$ et pour $\quad h \in H^2$.

Prenons en particulier $h \in \mathfrak{H}(m_k)$. En utilisant les relations (6.5) et (6.6) on déduit de (6.9) que

$$q_{1j}(S(m_i)) R_{ik} - r_{1j}(S(m_i)) Q_{ik} = 0 \quad \text{pour} \quad i, j, k = 1, 2, \ldots,$$

d'où il résulte

(6.10) $$q_{1j}(S(M)) R = r_{1j}(S(M)) Q \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Comme les relations (6.2) s'étendent aux fonctions de classe H^∞ des opérateurs $S(M)$ et T, il dérive de (6.10) et de (6.3) que

$$A q_{1j}(T) B = A r_{1j}(T) X B.$$

Puisque A et B sont des quasi-affinités il en résulte que

(6.11) $$q_{1j}(T) = r_{1j}(T) X \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots.$$

En vertu de (6.7) on a en particulier

(6.12) $$\left| \sum_{j=1}^{\infty} r_{1j}(\lambda) c_j \right| \leqq \|R\| \, \|c\| \quad \text{pour tout} \quad c \in l^2 \quad \text{et} \quad |\lambda| < 1;$$

par conséquent la série au premier membre converge uniformément pour $|\lambda| < 1$ vers une somme appartenant à H^2, et même à H^∞, et la correspondance

$$\tau \colon c \to \sum_{j=1}^{\infty} r_{1j}(\lambda) c_j$$

définit un opérateur

$$\tau \colon l^2 \to H^\infty (\subset H^2)$$

tel que $\|\tau\| \leqq \|R\|$. On a:

$$\bigvee_{n \geqq 0} (S(m_1))^n P_{\mathfrak{H}(m_1)} \tau l^2 = \bigvee_{n \geqq 0,\, j \geqq 1} P_{\mathfrak{H}(m_1)} \lambda^n r_{1j} \mathbf{C} = \bigvee_j P_{\mathfrak{H}(m_1)} r_{1j} H^2 = \bigvee_j P_{\mathfrak{H}(m_1)} r_{1j} \mathfrak{H}(m_j)$$

parce que $r_{1j} m_j \in m_1 H^2$,

$= \bigvee_j R_{1j} \mathfrak{H}(m_j) = \overline{P_1 R \mathfrak{H}(M)}$ où P_1 est la projection de $\mathfrak{H}(M)$ à son premiei espace composant dans la somme (6.1),

$= P_1 \mathfrak{H}(M)$ parce que $R = AB$ est une quasi-affinité,

$= \mathfrak{H}(m_1)$.

Cela veut dire que le sous-ensemble linéaire $\tau_1 l^2$ de $\mathfrak{H}(m_1)$, où

$$\tau_1 = P_{\mathfrak{H}(m_1)}\tau,$$

est cyclique pour $S(m_1)$, c'est-à-dire que

$$\bigvee_{n\geqq 0} (S(m_1))^n(\tau_1 l^2) = \mathfrak{H}(m_1).$$

Nous appliquons maintenant le lemme qu'on formulera après. Il s'ensuit qu'il existe un $c\in l^2$ tel que $f=P_{\mathfrak{H}(m_1)}\tau c$ vérifie la relation

(6.13) $$m_f = m_{S(m_1)} \quad (=m_1),$$

m_f étant la fonction minimum de la restriction de $S(m_1)$ au sous-espace invariant engendré par f. Or il est facile à montrer que pour tout $g\in\mathfrak{H}(m_1)$, $g\neq 0$ on a

$$m_g = \bigwedge_{w\in A(m_1,\, g)} w$$

où $A(m_1, g)$ est l'ensemble des fonctions intérieures w pour lesquelles wg est divisible par m_1. Il s'ensuit, en vertu de [1], p. 106, que

$$m_g = \frac{m_1}{m_1\wedge g}.$$

La relation (6.13) est ainsi équivalente à ce que $m_1/(m_1\wedge f)=m_1$, ou $m_1\wedge f=1$, c'est-à-dire que m_1 et f n'ont pas de diviseur intérieur commun non-constant.

Or il est évident que $m_1\wedge f=m_1\wedge\tau c$. Donc il existe $c\in l^2$ tel que

$$v = \sum_j c_j r_{1j}\in H^\infty, \quad m_1\wedge v = 1.$$

Considérons aussi la série $\sum_j c_j q_{1j}$. Par des raisons analogues, notamment par (6.7), cette série converge aussi uniformément dans $|\lambda|<1$ vers une fonction $u\in H^\infty$. De (6.11) il dérive

$$u(T) = v(T)X.$$

Puisque $v\wedge m_1=1$, $v(T)$ est une quasi-affinité, *cf.* [H], Propositions III. 3.3 et III. 4.7 b.

Par conséquent on a

$$X = \varphi(T) \quad \text{où} \quad \varphi = u/v\in N_T.$$

7. Cela achève la démonstration du théorème 2 sauf qu'on a encore à formuler et établir le lemme dont on s'est servi dans la démonstration.

Lemme. *Soit $T \in C_0$ dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, et soit $\sigma: \mathfrak{K} \to \mathfrak{H}$ un opérateur* (linéaire, continu) *d'un espace $\mathfrak{K}$ de Banach dans $\mathfrak{H}$ tel que*

$$\mathfrak{H} = \bigvee_{n \geq 0} T^n(\sigma\mathfrak{K}).$$

Il existe alors un $k \in \mathfrak{K}$ tel que $m_{\sigma k} = m_T$.

La démonstration est essentiellement la même que celle du théorème 1 dans [2], sauf qu'il y a à appliquer le théorème de catégorie de Baire à $\mathfrak{K}$ au lieu de $\mathfrak{H}$.

Ouvrages cités

B. Sz.-Nagy—C. Foiaş

[H] *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North-Holland—Akadémiai Kiadó (Amsterdam—London—Budapest, 1970).

[1] Modèle de Jordan pour une classe d'opérateurs de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **31** (1970), 91—115.

[2] Compléments à l'étude des opérateurs de classe C_0, *ibidem*, **31** (1970), 287—296.

[3] Jordan models for contractions of class $C_{\cdot 0}$, *ibidem*, **36** (1974), 305—322.

[4] On the structure of intertwining operators, *ibidem*, **35** (1973), 225—254.

(Reçu le 28 mai 1975)